Maths discrètes

Première Partie : La logique

Nous avons une proposition, variable prépositionnelle p, q, r, elle est soit vraie, soit fausse, 1 ou 0.

Nous pouvons les associer à des tables de vérités, il a n variable soit 2^n résultats

La disjonction v (ou)		
P	Q	P v Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La conjonction ^ (et)		
P	Q	P ^ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

L'implication →		
P	Q	P -> Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

L'équivalence ⇔		
P	Q	P <-> Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Le ou exclusif +		
P	Q	P + Q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

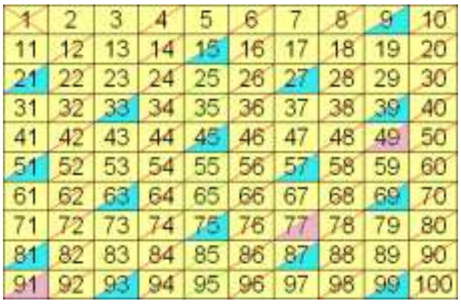
Rappel :

Soit x divise y et sont tous les deux des entiers. Cela se note x | y si et seulement si il existe un entier k tel que y = k*x

Soit n et m deux entiers naturels. N et m sont premiers entre eux, si et seulement si leur diviseur commun est 1, pgcd(n ;m).

Soit n un entier naturel premier, si il dispose de deux diviseurs distinct tel que 1 et n. Il faut regarder entre 1 et Racine(n) pour voir combien il y a de diviseur afin de vérifier.

Voici le crible d'Erathostène qui nous permet de voir les nombres premiers.



L'associativité de + dans R : (a+b) + c = a + (b+c) = a + b + c.

La distributivité de + par rapport à x dans R : a x (b+c) = (axb) + (a x c).

Le et ^ est également associatif. Et le v (ou) se distribue sur le ^ (et).

Le et puis se distribué sur le ou, le ou peut aussi être associatif.

Une tautologie est une proposition composée dont la valeur de vérité est toujours vrai quel que soit les valeurs de vérités des propositions élémentaires (p,q,r…) qui la composent. C'est noté 1|

Exemple : p+q ⇔ (p ^ /q) v (/p ^ q) ; p v /p

Une antilogie est une proposition composée dont la valeur de vérité est toujours faux quel que soit les valeurs de vérités des propositions élémentaires (p,q,r…) qui la composent. C'est noté 0|.

Exemple : q ^ /q

<u>Nous avons alors comme choses importantes :</u>

//p ⇔p (involution)

(p=>q) ⇔ (/p v q)

/(p^q) ⇔ /p v /q)   /(p v q) ⇔ /p^/q   (Lois de *De Morgan)*

p^(q v r) ⇔ (p^q) v(p^r) (distributivité de ^sur le v.)

p v(q^r) ⇔ (p v q)^(p v r) (distributivité de v sur ^.)

p v p ⇔ p   p^p ⇔ p   (Idempotence)

p v /p = 1|
p ^ /p = 0|
0| v q = q
1| ^ p = p
1| v q = q
Le ^ est associatif et le v est commutatif

Prédicat, théorème, implication

Définition :

- Une proposition est un énoncé qui a pour valeur de vérité V(1) ou F(0) sans ambiguïtés sont notées (p,q,r)
- Un prédicat est un énoncé qui contient des variables définies dans des ensembles données. Quand ces variables sont fixées, cet énoncé devient une proposition.
  Exemple : $x^2 > 0$ est un prédicat noté P(x) et $x^2 < 0$ est un prédicat noté Q(x)
- Un théorème est un prédicat dont la valeur de vérité est toujours vrai quelque soir les valeurs prises par les variables dans des ensembles respectifs. Dans notre exemple, P(X) est un théorème mais pas Q(X).

On n'est pas en présence d'un prédicat s'il y ambiguïté dans l'énoncé. Si la variable n'est pas définit.

Implication logiques et méthode de démonstration

Savoir si un prédicat est un théorème. Il peut se présenter sous la forme P => Q
Remarques : P, Q, R sont des prédicats et p, q, r sont des propositions.

Concernant l'implication logique :
La réciproque de p => q est l'implication q =>p, la négation de p => q est /(p→q) soit (p ^ /q), la contraposée de p => q ⇔ (/q => /p) c'est une tautologie. Ce sont trois notions très importantes pour le raisonnement.

Le prédicat P => Q est-il un théorème ?

Trois cas :
1- /P est un théorème (P toujours faux) donc P => Q est un théorème.
2- Q est un théorème donc P => Q est un théorème.
3- /P n'est pas un théorème et Q n'est pas un théorème

La méthode du syllogisme

Cette méthode repose sur la **transitivité** *de l'implication logique, soit, la tautologie:*

$$\{[p_1 \Rightarrow p_2] \wedge [p_2 \Rightarrow p_3]\} \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)$$

p_1, p_2, p_3 *propositions élémentaires.*

Soit $P \Rightarrow Q$ *, il s'agit d'introduire le prédicat R tel que* $P \Rightarrow R$ *et* $R \Rightarrow Q$ *est vrai.*

La contraposition :

Pour démontrer P => Q nous utilisons sa contraposée /Q => /P

Exemples:

1. $"P(a,b): a \neq -1 \wedge b \neq -1"$

   $Q(a,b): a + ab + b \neq -1"$ avec $(a, b) \in R^2$

2. $"P(n):$ n^2 *est un en tier pair*

   $Q(n):$ *n es t un enti er pair,* $n \in N"$

3. $"P(x,x'): x \neq x'$

   $Q(x,y,x'): xy \neq x'y,$ avec $x \in R, x' \in R, y \in R^*"$

Retour au ①

$\underbrace{a \neq -1 \wedge b \neq -1}_{P} \Rightarrow \underbrace{a + ab + b \neq -1}_{Q}$

$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

$a + ab + b = -1 \Rightarrow a = -1 \vee b = -1$ Nangom

dem : $a + ab + b = -1 \Rightarrow (a + ab) + (b + 1) = 0$

$\Rightarrow a(1+b) + (b+1) = 0$

$\Rightarrow (b+1)(a+1) = 0$

$\Rightarrow b + 1 = 0 \vee a + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \vee a = -1$

3. "$P(x, x')$: $x \neq x'$

$Q(x, y, x')$: $xy \neq x'y$ avec $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$"

Retour au ②

$n \in \mathbb{N}$ n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

n^2 est pair $\Rightarrow \underset{k \in \mathbb{N}}{n^2 = 2k} \Rightarrow \sqrt{n^2} = \sqrt{2k} = \sqrt{2}\sqrt{k}$?!

Contraposée

$\overline{n \text{ est pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ est pair}}$

n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair

n est impair $\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2k' + 1$

$\Rightarrow n^2$ impair

Retour au ③

$x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$

$x \neq x' \Rightarrow xy \neq x'y$

contraposée $xy = x'y \Rightarrow x = x'$ dem $xy = x'y \Rightarrow xy - x'y = 0$

$\Rightarrow y(x - x') = 0$ or $y \neq 0$

$(x - x') = 0 \Rightarrow x = x'$

Disjonction des cas ou dilemmes

Il s'agit de démontrer $P \Rightarrow Q$ en distinguant 2 cas.

On utilise la tautologie suivante:

$$\{[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [(p \wedge \bar{r}) \Rightarrow q] \wedge [r \vee \bar{r}]\} \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

Il faut donc introduire 2 prédicats R et $\overline{R}$ et démontrer que:

$(P \wedge R) \Rightarrow Q$ *est un théorème.*

$(P \wedge \overline{R}) \Rightarrow Q$ *est un théorème.*

Ainsi on a prouvé $P \Rightarrow Q$.

Exemple : Montrer $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

$Min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On choisit : $R(a,b)$: " $a \geq b$ "

$\overline{R}(a,b)$: " $a < b$ "

- $a \geq b \Rightarrow max(a,b) = a$ et $min(a,b) = b$

  et $a - b \geq 0 \Rightarrow |a-b| = a-b$

  $max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = \frac{1}{2}(2a) = a$

  $min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-a+b) = \frac{1}{2}2b = b$

- $a < b \Rightarrow m(a,b) = b$ et $min(a,b) = a$

  $a - b < 0 \Rightarrow |a-b| = -a+b$

  $max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-a+b) = \frac{1}{2}(2b) = b$

  $min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = \frac{1}{2}(2a) = a$

Le Contre-Exemple

Soit A un prédicat dépendant de la variable x, $x \in E$.

A n'est pas un théorème si A prend la valeur faux pour au moins un élément x de E.

appelons cet x, x_0, alors

x_0 est un contre-exemple.

Dans le cas du prédicat $P \Rightarrow Q$, Nous voulons démontrer que $P \Rightarrow Q$ n'est pas un théorème.

On cherche donc $x_0 \in E$ tel que $\overline{P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)}$ est vrai.

Or $\overline{P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)} \Leftrightarrow P(x_0) \wedge \overline{Q(x_0)}$

Trouver un contre-exemple c'est donc dire:

Il existe $x_0 \in E$ tel que $P(x_0) \wedge \overline{Q(x_0)}$

- *Soit le prédicat :*

$n \in N$, n est divisible par 4 et n est divisible par 6

$\Rightarrow$ n est divisible par 24

Ce n'est pas un théorème, en effet:

Il existe $12 \in N$ tq $4 | 12 \wedge 6 | 12 \wedge \overline{24 | 12}$

Le raisonnement par l'absurde

Le but est de démontrer que le prédicat A est un théorème.

Définition:

Le raisonnement par l'absurde consiste à introduire le prédicat $\overline{A}$ tel que $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ où B est un théorème connu.

En effet, par contraposition:

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad B \Rightarrow A$

Exemple

Soit pour $x \in R$, $A(x)$: $x^2+1 \neq 0$

Demontrons par l'absurde que $A(x)$ est un th

$\exists x \in R$ tq $\overline{A(x)}$

$\Rightarrow x^2+1=0$

$x^2 = -1$

-1 a un carré or -1 n'est pas un carré réelle

Les ensembles

Les entiers Naturels N, Entiers relatifs Z, Décimaux D, Rationnel Q, Reels R, Complexe C

Les bases :

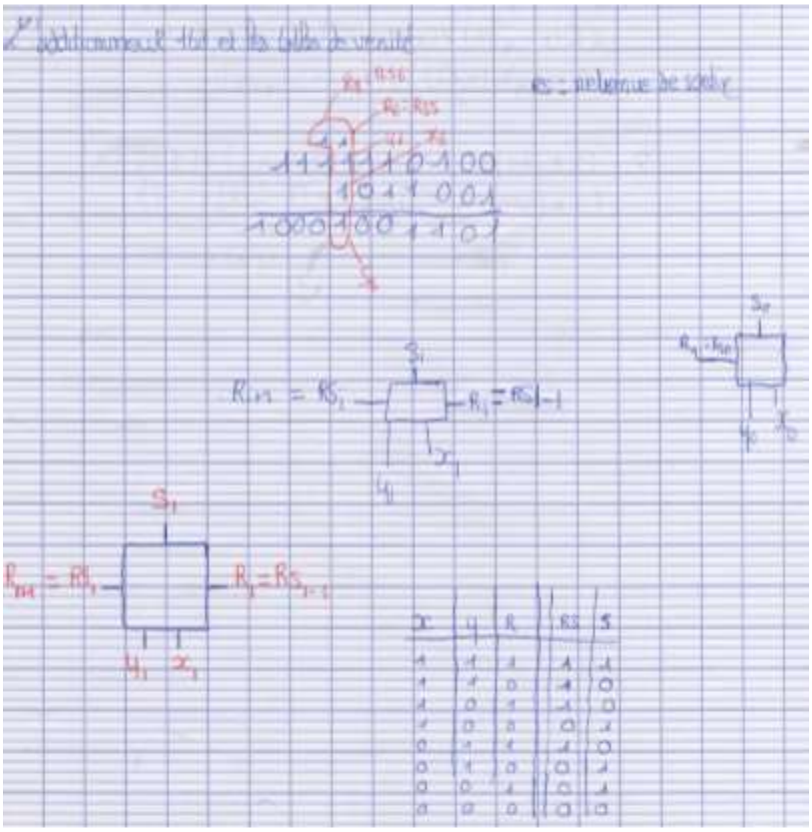
Pour tout entier naturel, il existe un développement unique de la forme :

$X = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \ldots x_1 b^1$

L'entier n est le plus grand entier tel que $b^n < x$

On voit donc le binaire, la base 10 (courante) et l'hexadécimal

L'additionneur 1 bit



Exercice 1

Les énoncés suivant sont ils des propositions ?

1) la lune tourne autour de la terre — Proposition
2) la lune tourne autour de la galaxie — Proposition
3) il fait chaud — n'est pas une proposition
4) je suis en train de mentir — n'est pas une proposition
5) L'IUT est à Talence ou à Gradignan — Proposition

Les énoncés suivants sont ils des prédicats ?

1) Pour x Є Q, $x^2 \neq 2$ — Prédicat
2) P est un nombre premier — n'est pas un prédicat
3) Pour f R=>R, f est paire — Prédicat
4) Sin(x) est impair, x Є R — n'est pas un prédicat

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) (5 est un entier positif)v(2>3) — vrai
2) (5 est un entier relatif négatif)v(2>3) — faux
3) (3>2) ^ (2+3=4) — faux
4) $(3\leq 2)$ ^ $(2+3\neq 5)$ — faux
5) (2+3=4) => $2\geq 3$ — vrai
6) (3>2) => (2+3=4) — faux

Déterminer la valeur de vérité des énoncés suivants :

1) Si l'univers est né du Big Bang alors 45 est divisible par 5
2) Si 15 et 45 sont premiers entre eux alors 18 est divisible par 4
3) Si 15 et 45 sont premiers entre eux alors 18 est divisible par 3
4) Ou il y a des habitants sur Mars, ou 11 est un nombre premier, ou 545524 est divisible par 8.

Ces énoncés sont tous vrais

Jean est fatigué ou malade. S'il est fatigué alors il est contrarié. Jean n'est pas contrarié. Donc il est malade.

Ce raisonnement est-il juste ?

Soit F la proposition « Jean est fatigué », M la proposition « Jean est malade » et C la proposition « Jean est contrarié ».

On a F=>C, donc on a (par contra position) $\overline{C}$=>$\overline{F}$.

/C est vraie et /C=>/F est vraie donc /F est vrai

De plus F v M est vraie, comme F est faux (car /F vrai) alors on a M.

Le raisonnement est juste !

Exercice 2

Soient 2 prédicats, et t Є T :

P(t) : « il pleut au temps t »

Q(t) : « il y a des nuages au temps t »

Ecrire P(t) => Q(t), puis sa réciproque, sa contra-posée, sa négation, la contra-posée de la réciproque. Lesquelles sont des théorèmes ?

- S'il pleut au temps t alors il y a des nuages au temps t — théorème
- S'il y a des nuages au temps t alors il pleut au temps t — n'est pas un théorème
- S'il n'y a pas de nuage au temps t alors il ne pleut pas au temps t — théorème
- Il pleut au temps t et il n'y a pas de nuages au temps t — n'est pas un théorème
- S'il ne pleut pas au temps t alors il n'y a pas de nuages au temps t — n'est pas un théorème

Ecrire la négation, la réciproque et la contra-posée de :

⇨ Si (-1) a une racine réelle alors je suis bon en maths.

Négation : -1 a une racine réelle et je ne suis pas bon en maths

Réciproque : Si je suis bon en maths alors –1 a une racine réelle

Contra-posée : Si je ne suis pas bon en maths alors –1 n'a pas de racine réelle

⇨ S'il fait beau ou si je rate mon train alors j'irai à la plage

Négation : Il fait beau ou je rate mon train et je n'irai pas à la plage

Réciproque : Si je vais à la plage alors il fait beau ou je rate mon train

Contra-posée : Si je ne vais pas à la plage alors il ne fait pas beau et je ne rate pas mon train

Exercice 3

Les énoncés suivants sont ils des théorèmes ?

1) X Є R, x = PI — n'est pas un théorème : contre-exemple : 3 Є R et 3 $\neq$ PI
2) (x, y) Є R^2 x=y ⇔ $x^2 = y^2$ — n'est pas un théorème : $(-5)^2=5^2$ et $-5\neq5$
3) (a, b) Є R^2 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2+2ab+b^2)$ — théorème
4) t Є R $\cos^2 t+\sin^2 t = -1$ => cos(PI) = -1 — théorème car la première proposition est fausse donc l'implication est toujours vraie.

Ecrire la réciproque, la négation et la contra-posée de l'expression suivante : Si $x^2=4$ alors x=2

Réciproque : Si x=2 alors $x^2=4$

Négation : $x^2=4$ et $x\neq2$

Contra-posée : Si $x\neq2$ alors $x^2\neq4$

Donner la condition nécessaire et la condition suffisante de l'implication A=>B

A est la condition suffisante de B

B est la condition nécessaire de A

Exercice 4

Discuter suivant les valeurs de p, q, r les valeurs de : (en faisant une table de vérité)

p => (p=>q)

q v (/q^p)

[(p^/q) v (/p^q)] => (p ⇔q)

(p^q) => r

(p v q)=> r

p => (q => r)

Retrouver l'expression qui a pour table de vérité les tables suivantes :

p	q	F(p,q)	G(p,q)
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Résultat :

F(p,q) : q => p ou p v /q

G(p,q) : p^/q

p	q	r	H(p,q,r)	K(p,q,r)	L(p,q,r)
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0

Résultat :

H(p,q,r) = r^(p=>q)

K(p,q,r) = p^(q v r) v /p^(q + r)

L(p,q,r) = p+(q+r)

Remarque : les + des résultats de K et L sont des « ou exclusifs ».

Exercice 5

Démontrer :

1) Soit n Є N*, n²+1 n'est pas le carré d'un entier positif
2) Montrer que n^3 a la même parité que n
3) Montrer que si n est impair alors n^2-1 est divisible par 8
4) Montrer que sqrt(2) n'est pas rationnel
5) Montrer que si p est premier alors sqrt(p) n'est pas rationnel
6) Soit x, y, z, t réels tels que yt ≠ 0 Montrer que si y≠-t alors [x/y = z/t] => [x/y = (x+z)/(y+t)]

1)

Par l'absurde : Soit n Є N* et k Є N*. Si n²+1 est le carré d'un entier alors n²+1=k²

k²-n²=1 donc (k-n)(k+n)=1 donc k-n=1 et k+n=1 ce qui est incohérent donc n²+1 n'est pas le carré d'un entier.

2)

Si n est pair n=2k k Є N alors n^3=2x2²xk^3 qui est pair

Si n est impair n=2k+1 donc n^3=8k^3+3x2²k²+6k+1 = 2xK+1 qui est donc impair

3)

On suppose que n est impair donc n=2k+1

Donc n^2-1 = 4k²+4k+1-1 = 4 x k(k+1)

Remarque : si l'on veut démontrer que 4 x k(k+1) est divisible par 8 alors il faut démontrer que k(k+1) est pair, c'est à dire divisible par 2.

Or k(k+1) est pair car si k est pair alors k+1 est impair et le produit est pair, et de même si k est impair.

Donc si n est impair alors n^2-1 est divisible par 8

4)

On suppose que sqrt(2) est rationnel.

Donc sqrt(2)=a/b avec a et b non tous deux pairs (c'est à dire que la fraction est irréductible) donc 2=a²/b²

Donc a²=2b² donc a² est pair donc a est pair et on peut noter a=2a'

Donc 2b²=4a'² donc b²=2a'² donc b² est pair donc b est pair.

Ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc sqrt(2) n'est pas rationnel.

5)

Résolution par l'absurde,

On suppose que sqrt(p) est rationnel.

Donc sqrt(p) = a/b avec a et b non tous deux divisibles par p (sinon on peut simplifier).

Donc p = a^2/b^2 donc $b^2p=a$ et p divise a^2 donc p divise a car p est premier (attention, ne marche qu'avec des nombres premiers (voir exercice suivant question 4)

Donc a = pa'

Donc $pb^2=p^2a'^2$ donc $b^2=pa'^2$ p divise b^2 donc p divise b car p est premier.

On arrive à la contradiction a et b non tous deux divisible par p

Donc sqrt(p) n'est pas rationnel.

6)

On suppose que x/y = z/t c'est à dire xt = yz

On a [x/y - (x+z)/(y+t)] = (xt – yz /(y(y+t)) = 0 car xt= zy

Donc on à bien x/y = (x+z)/(y+t)

Exercice 6

Montrer que les énoncés suivants sont faux :

1) Soit f :R=>R dérivable. On suppose que $f'(x_0)=0$ alors x_0 est un minimum pour f.
2) Toutes les applications de R dans R sont continues
3) Tout polynôme à coefficients entiers possède au moins une solution réelle
4) Si 12 divise n^2 alors 12 divise n

1)

Contre exemple :

$f(x) = -x^2$, dérivable

$f'(x_0)$ $x_0 = 0$

et $-x^2 \leq 0$ alors x_0 est un maximum.

Remarque : une démonstration plus fortuite est de faire un tableau de variation.

2)

Contre exemple :

La fonction

F(x) =   1 si x > 0

-1 si x $\leq$ 0

est définit sur R est n'est pas continue en 0

Remarque : on pourra éventuellement accompagner ce contre exemple d'un schéma.

3)

Contre exemple :

$P(x) = x^2+2x+3$

1, 2, 3 sont entiers et Δ = -8 donc pas de solutions réelles

4)

Contre exemple :

$N^2=36$ 12 divise 36, mais N=6 et 12 ne divise pas 6

Remarque, cet énoncé est vrai avec un nombre premier.

Un nombre premier divise n^2 et n.

Exercice 7

Montrer que pour n Є N, $n^3 – n$ est divisible par 3

De même montrer que pour n Є N $n^5 – n$ est divisible par 5

Montrons que $n^3 – n$ est divisible par n pour tout n Є N

$n^3 – n = n(n-1)(n+1)$

notons $n = 3q + r$, r = 0, 1, 2 et q Є N

1er cas : r=0 :

$n = 3q$ donc $n^3 – n = 3q(n-1)(n+1)$ donc $n^3 – n$ est divisible par 3

2ème cas : r=1

$n = 3q + 1$ donc $n^3 – n = n(3q+1 –1)(n+1) = 3q(n+1)n$ donc $n^3 – n$ est divisible par 3

3ème cas : r=2

$n = 3q + 2$ donc $n^3 – n = n(n-1)(3q +2 +1) = 3(q+1)(n-1)n$ donc $n^3 – n$ est divisible par 3

Montrons que $n^5 – n$ est divisible par 5 pour tout n Є N

$n^5 – n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

notons $n = 5q + r$, r = 0, 1, 2, 3, 4 et q Є N

La suite de la démonstration est strictement identique.